



## Resumen: Propiedades y operaciones propias de números radicales.

- En una **raíz** se distinguen dos partes principales: el **índice** (letra **n**) y el **radicando** (letra **a**). Una raíz es la operación inversa de elevar un número a una potencia. Consiste en calcular el número que, elevado al índice de la raíz, produce el radicando.

$$\sqrt[\text{índice}]{\text{radicando}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{Ejemplo: } \sqrt[3]{8} = 2, \text{ ya que } 2^3 = 8$$

- El índice de una raíz debe ser mayor que 1, siendo los índices más habituales  $n=2$  y  $n=3$ .
  - Índice  $n = 2$ : en este caso **no se indica** y se denomina **raíz cuadrada**. Ejemplo:  $\sqrt{8}$
  - Índice  $n = 3$ : se denomina **raíz cúbica**. Se indica el índice. Ejemplo:  $\sqrt[3]{7}$
  - Normalmente, para los índices siguientes se utilizan los números ordinales: raíz cuarta, raíz quinta...
  - El radicando puede llevar un exponente, y es algo habitual. Ejemplo:  $\sqrt[4]{3^2}$
- Una raíz puede expresarse como una **potencia con exponente fraccionario**:

$$\sqrt[n]{a^b} = a^{b/n}$$

$$\text{Ejemplos: } \sqrt[4]{2^3} = 2^{3/4} \quad ; \quad \sqrt[3]{5} = 5^{1/3} \quad ; \quad \sqrt{6} = 6^{1/2} \quad ; \quad \sqrt{x^3} = x^{3/2}$$

- Nota:** Esta relación resulta muy útil para entender o demostrar varias de las propiedades y operaciones que se realizan con números radicales.





- **Propiedades de los números radicales:** Las principales propiedades son las siguientes (deben considerarse en ambos sentidos):

| Propiedad                                   | Expresión                                                 | Ejemplos                                                                          |                                                                                                      |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Producto</b> de raíces del mismo índice. | $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$     | $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5 \cdot 5^2} = \sqrt[4]{5^3}$         | $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$                                     |
| <b>Cociente</b> de raíces del mismo índice. | $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ | $\frac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 7}{5}} = \sqrt[3]{7}$  | $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{6x^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3x}}$ |
| <b>Potencia</b> de una raíz                 | $(\sqrt[n]{a})^b = \sqrt[n]{a^b}$                         | $(5\sqrt{2})^3 = 5^3 \sqrt{2^3} = 5^3 \cdot 2\sqrt{2}$                            | $x \cdot 8\sqrt{x} = 2^3 \sqrt{x^3} = (2\sqrt{x})^3$                                                 |
| <b>Raíz</b> de una raíz                     | $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$             | $3 \sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{2}}} = 3 \sqrt[3 \cdot 5 \cdot 2]{2} = 3 \sqrt[30]{2}$ | $\sqrt[9]{x^4} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[3]{x^3 \sqrt{x}}$         |





- Las raíces de **índice par** solo dan como resultado **un número real si el radicando es positivo o cero**. Si el radicando es negativo, la raíz no tiene solución real y su resultado pertenece a los números complejos. Además, cuando se resuelve una ecuación del tipo  $x^2 = a$ , las soluciones son  $\pm\sqrt{a}$ . Sin embargo, el símbolo  $\sqrt{a}$  representa únicamente la raíz principal (positiva).

Ejemplos:  $\sqrt{-4} = \nexists$  en  $\mathbb{R}$ . Por otro lado, si  $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

- Las raíces de **índice impar** mantienen en el resultado el signo del radicando.

Ejemplos:  $\sqrt[3]{-27} = -3$        $\sqrt[5]{32} = 2$

- Simplificación de radicales:** El índice de una raíz se puede simplificar con el exponente del radicando.

Ejemplos:  $\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[3 \cdot 3]{5^{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{5^2}$       Otra forma de verlo:  $\sqrt[4]{7^6} = 7^{6/4} = 7^{3/2} = \sqrt{7^3}$

- Modificar el índice de una raíz:** Es el proceso contrario al anterior. Multiplicando el índice y el exponente del radicando por el mismo número natural, queda modificado el índice deseado. Este proceso es muy utilizado para poder multiplicar o dividir radicales con diferente índice. Normalmente se requiere hacer el **mínimo común múltiplo** de todos los índices, para conseguir después que todos los índices sean dicho número. Ejemplos:

- Modificar un índice de una raíz:

$$\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[2 \cdot 9]{5^{2 \cdot 6}} = \sqrt[18]{5^{12}}$$





- Llevar todos los índices a un mismo índice para poder multiplicar. Se calcula el mínimo común múltiplo de todos los índices de las raíces implicadas.

$$\frac{\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[9]{3^2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow (\text{m. c. m} = 18) \Rightarrow \frac{3 \cdot \sqrt[6]{3^4} \cdot 2 \cdot \sqrt[9]{3^2 \cdot 2}}{9 \cdot \sqrt[9]{3^9 \cdot 1}} = \frac{18 \sqrt[18]{3^{12}} \cdot 18 \sqrt[18]{3^4}}{18 \sqrt[18]{3^9}} = \sqrt[18]{\frac{3^{12} \cdot 3^4}{3^9}} = \sqrt[18]{3^{12+4-9}} = \sqrt[18]{3^7}$$

- **Extracción o introducción de factores en un radical:** teniendo en cuenta el concepto de radical:

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a \quad \text{Ejemplo: } \sqrt[4]{3^4} = 3^{4/4} = 3$$

- Para **extraer un factor de una raíz**, el factor debe estar elevado a un número que sea igual que el índice de la raíz o un múltiplo de este. Si se cumple esta condición el factor sale de la raíz multiplicando.

$$\text{Ejemplos: } \sqrt[4]{3^7} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^3} = 3 \cdot \sqrt[4]{3^3} \quad \sqrt[3]{5^6} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^3} = 5 \cdot 5 = 5^2$$

$$\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$$

- Para **introducir un factor en una raíz**, se multiplica el exponente del factor por el índice de la raíz. Es el proceso contrario al anterior.

$$\text{Ejemplos: } 15\sqrt{2} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2} = \sqrt{450}$$





$$36\sqrt[3]{5} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^{3 \cdot 2} \cdot 3^{3 \cdot 2} \cdot 5} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^6 \cdot 5}$$

- **Suma y resta de números radicales:** solamente se pueden sumar o restar raíces que, una vez simplificados, tengan el **mismo índice y radicando**. Se puede entender como si la raíz en cuestión fuera una "x". Ejemplos:

$$4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} \Rightarrow \text{No se pueden restar (distinto radicando)}.$$

$$2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt{5} \Rightarrow \text{No se pueden sumar (distinto índice)}.$$

$$4\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{5} = (4 + 3 - 5) \cdot \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5} \quad \text{Se puede entender como suma y resta de } x = \sqrt[3]{5}$$

► Ejercicio típico:  $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 4\sqrt{27} = 3\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{5^2 \cdot 3} + 4\sqrt{3^2 \cdot 3} = 3 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 4 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = (6 - 10 + 12) \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

- **RACIONALIZAR:** racionalizar consiste en **eliminar las raíces del denominador en una fracción**. Para ello, se busca transformar la fracción en otra equivalente, multiplicando la primera por una fracción que sea igual en el numerador y en el denominador, de tal manera que es como si se multiplica por "1", pero trae como consecuencia una transformación que elimina las raíces del denominador. Se pueden distinguir dos **casos principales**:

- Que el **denominador sea un monomio** con una raíz: Se multiplicará por la misma raíz, modificando el exponente del radicando como sea necesario para provocar que desaparezca la raíz al multiplicar.





$$\text{Ejemplo 1: } \frac{2x+4}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{2x+4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(2x+4) \cdot \sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{2x\sqrt{6} + 4\sqrt{6}}{6} = \frac{2(x\sqrt{6} + 2\sqrt{6})}{2 \cdot 3} = \frac{(x\sqrt{6} + 2\sqrt{6})}{3}$$

$$\text{Ejemplo 2: } \frac{2 + \sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{3^2}} \Rightarrow \frac{2 + \sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{(2 + \sqrt[5]{5}) \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{5 \cdot 3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{5 \cdot 3^3}}{3}$$

⚠ Nota: **después de racionalizar**, a veces se pueden **simplificar** numerador y denominador, para lo cual conviene considerar si es posible sacar factor común...

⚠ Que el **denominador sea un binomio** con una o dos raíces cuadradas. Se **multiplica por la conjugada** del binomio, de tal forma que al multiplicar se obtiene una diferencia de cuadrados y desaparecen las raíces del denominador (considerar la expresión notable "suma por diferencia"):

$$\text{Ejemplo 1: } \frac{3}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{3}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (3 + \sqrt{3})}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{9 + 3\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{3 \cdot (3 + \sqrt{3})}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ejemplo 2: } \frac{2x-4}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2x-4}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \frac{(2x-4) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2(x-2) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{2})}{x-2} = 2(\sqrt{x} - \sqrt{2})$$

⚠ Nota: En expresiones complejas, antes de multiplicar conviene mirar si se puede simplificar.

