Resumen Gravitación-2º Bachillerato

- Ley **de gravitación universal de Newton:** todo cuerpo material del universo atrae a cualquier otro cuerpo con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa:

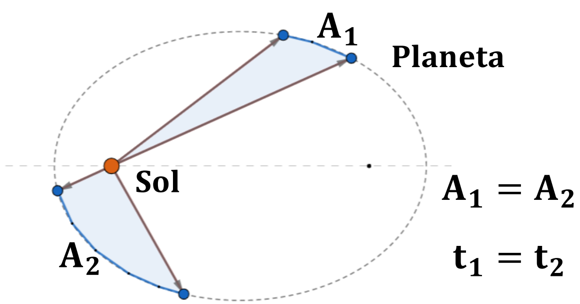
$$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}\,\vec{u}_r \quad [N]$$

- *La **fuerza de atracción gravitatoria** es una **fuerza atractiva** (signo negativo), **central, y conservativa**.*

- **Primera ley de Kepler:** Los planetas giran en torno al Sol en **órbitas elípticas**, ocupando el Sol uno de sus focos. Sin embargo, en el sistema solar, las órbitas de los planetas (excepto Mercurio) presentan una excentricidad pequeña, y a veces se consideran como órbitas circulares a modo de aproximación, ya que el error cometido es pequeño.

- **Segunda ley de Kepler:** La **velocidad areolar** de un planeta en su órbita elíptica es **constante**, es decir, la velocidad de los planetas en su órbita varía de tal manera que el **vector de posición** con respecto al Sol **barre áreas iguales en tiempos iguales**. Así, en **el punto** de la órbita **más cercano** al sol **(perihelio)** el planeta alcanza su velocidad orbital máxima, y en el **punto más alejado (afelio)**, su velocidad mínima.

$$v_A = \frac{dA}{dt} = cte \quad [m^2/s]$$



- **Tercera ley de Kepler:** Los planetas giran alrededor del Sol manteniendo una relación armónica, de tal modo que **los cuadrados de sus periodos orbitales son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.**

$$\frac{\mathbf{T_1^2}}{\mathbf{T_2^2}} = \frac{\mathbf{r_1^3}}{\mathbf{r_2^3}} = \mathrm{k}\ (\text{cte de Kepler}) \Rightarrow \mathrm{T_1^2} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{r_1^3}$$

- *El radio considerado en la terceta ley de Kepler es el **radio medio de la órbita elíptica** (semieje mayor: "a"). Si la órbita es circular, es simplemente su radio. La constante de Kepler depende de la masa del astro central, (en el sistema solar es $3 \cdot 10^{-19}$ s^2/m^3).*

- En una **órbita circular**, se tiene un **movimiento circular uniforme (MCU)**, lo que significa que la **velocidad orbital** permanece constante en módulo, al igual que el **radio orbital**.

  Además, **la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que orbita es igual a la fuerza centrípeta**, que es la responsable del movimiento circular. En gravitación, **considerando que la única fuerza que actúa sobre un cuerpo que orbita es la fuerza de atracción gravitatoria**, se plantea la 2ª ley de Newton, ley fundamental de la dinámica, igualando los módulos de ambas fuerzas, de tal manera que **queda lo siguiente:**

$$\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{F_c} \Rightarrow \mathbf{F_g} = \mathbf{F_c} \Rightarrow \mathrm{G} \cdot \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{r}^2} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{a_n} \Rightarrow \mathrm{G} \cdot \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{r}^2} = \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} \Rightarrow \mathrm{G} \cdot \frac{\mathrm{M} \cdot \cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{r}^{\cancel{2}}} = \cancel{\mathrm{m}} \cdot \frac{\mathrm{v}^2}{\cancel{\mathrm{r}}} \Rightarrow$$
$$\frac{\mathbf{G \cdot M}}{\mathbf{r}} = \mathbf{v^2}\ (\text{velocidad orbital}) \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{\mathbf{G \cdot M}}{\mathbf{v^2}}\ (\text{radio orbital})$$

Por otro lado, **se puede relacionar la velocidad orbital con el período orbital** (y con la frecuencia angular)**, utilizando las siguientes expresiones** del movimiento circular:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}}\ ;\ \ \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}\ \Rightarrow \mathrm{v} = \frac{2\pi \cdot \mathrm{r}}{\mathrm{T}}$$

Sustituyendo en la expresión del radio orbital, queda la expresión asociada a la tercera ley de Kepler:

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M}}{\mathrm{v}^2} \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M}}{\left(\frac{2\pi \cdot \mathrm{r}}{\mathrm{T}}\right)^2} \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M}}{\frac{4\pi^2 \cdot \mathrm{r}^2}{\mathrm{T}^2}} \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^2}{4\pi^2 \cdot \mathrm{r}^2} \Rightarrow \frac{\mathbf{r^3}}{\mathbf{T^2}} = \frac{\mathbf{G \cdot M}}{\mathbf{4\pi^2}} \Rightarrow \mathrm{r} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^2}{4\pi^2}}$$

$$Nótese\colon \left\{\frac{4\pi^2}{G \cdot M} = K\ (cte\ de\ Kepler)\right\}$$

- *La demostración de la tercera ley de kepler para una* ***óbita elíptica*** *es mucho más compleja. Se puede asumir directamte considerando que* ***el radio es el semieje mayor*** *"a" o radio medio.*

- En **una órbita, tanto circular cómo elíptica, el momento angular $\vec{\mathbf{L}}$ se conserva**, ya que el momento de la fuerza gravitatoria es nulo ($\vec{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$), por ser la fuerza gravitatoria una fuerza central. Esto tiene ciertas consecuencias importantes:

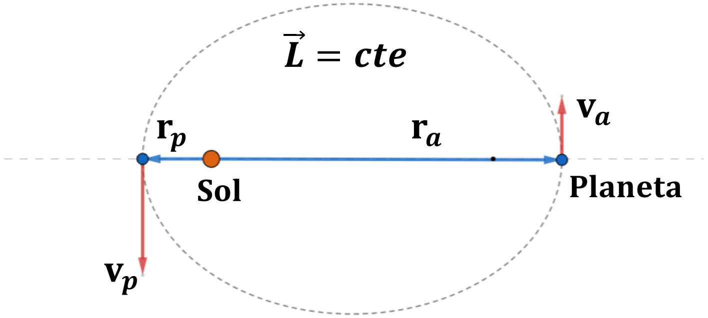
    - **Invarianza del plano de rotación:** El movimiento de rotación del planeta o satélite se produce en un único plano, perpendicular al momento angular.

    - Si la trayectoria es circular, el módulo del radio y de la velocidad son constantes, y estos vectores sólo varían en dirección y sentido.

- Si la trayectoria no es circular, el módulo de la velocidad varía con una relación de proporcionalidad inversa con respecto al módulo del vector de posición, de manera que la velocidad aumenta cuando disminuye el radio, y viceversa.

- En una **órbita elíptica**, se puede calcular de manera sencilla el **módulo del momento angular atendiendo al afelio y al perihelio**, ya que en estos dos puntos el vector de posición y la velocidad lineal del planeta son perpendiculares, forman 90º. En una órbita circular esto ocurre en cualquier punto.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} \Rightarrow \mathrm{L} = r \cdot p \cdot \mathrm{sen}\,\alpha = \mathbf{r \cdot m \cdot v \cdot sen\,\alpha} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{L} = \mathrm{cte} \Rightarrow L = \mathrm{cte} \Rightarrow \mathbf{L_{afelio}} = \mathbf{L_{perihelio}} \Rightarrow L_a = L_p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r_a \cdot m \cdot v_a \cdot \cancel{\mathrm{sen}\,90^\circ} = r_p \cdot m \cdot v_p \cdot \cancel{\mathrm{sen}\,90^\circ} \Rightarrow \mathbf{r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p}$$



- *En órbitas elípticas, se suelen relacionar las velocidades y los radios del afelio y el perihelio a través del módulo del momento angular, de tal manera que si se conocen tres datos (dos radios y una velocidad, o dos velocidades y un radio) se deduce el cuarto dato. En estos dos puntos concretos la aceleración tangencial es nula, y solo existe aceleración normal, que además lleva la dirección y sentido de la fuerza de atracción gravitatoria.*

- *Otra relación útil para resolver problemas de órbitas elípticas es considerar que la velocidad areolar es contante (2ª ley de Kepler) y tiene una relación con el módulo del momento angular de la siguiente manera:*

$$\frac{dA}{dt} = \mathrm{cte} \Rightarrow \frac{\text{Área de la elipse}}{\text{perído de rotación}} = \frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{ab}}{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2m}}$$

- En física, un **campo** es una región del espacio en la que asignamos a cada uno de sus puntos un valor, ya sea escalar o vectorial. El **campo gravitatorio** es una perturbación que crea todo cuerpo material en el espacio que lo rodea, por el hecho de tener masa. Dicha perturbación es mayor cuanto mayor sea la masa del cuerpo y cuanto menor sea la distancia a dicho cuerpo. De esta forma, se obtiene el **vector intensidad de campo gravitatorio** que es la **fuerza gravitatoria que actúa por unidad de masa** (masa testigo).

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{F_G}}}{\mathbf{m}} = \frac{-G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2}}{\cancel{m}} \overrightarrow{u_r} = -\frac{GM}{R^2}\overrightarrow{u_r} \qquad \left[\frac{N}{kg}\right] \ o \ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

- *El módulo del vector campo se conoce también como aceleración de la gravedad. Una expresión especialmente utilizada para hablar de la intensidad del campo en la superficie de un astro. Suele expresarse en m/s².*

$$\mathbf{g} = \frac{GM}{R^2} \qquad \left[\frac{N}{kg}\right] \ o \ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

- Debido a que la fuerza de atracción gravitatoria es **central y conservativa**, **el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo que se desplaza entre dos posiciones dentro de un campo gravitatorio depende exclusivamente de sus posiciones inicial y final** y no de la trayectoria seguida. Esto permite definir una **energía potencial** asociada al campo gravitatorio, tomando como **origen de potenciales el infinito** $(E_p^\infty = 0)$. La expresión de la energía potencial queda:

$$\mathbf{E_p} = -\frac{\mathbf{GMm}}{\mathbf{R}} \quad [J]$$

- Del mismo modo, como el campo gravitatorio es conservativo, considerando únicamente la acción de la fuerza gravitatoria **la energía mecánica de un cuerpo se mantiene constante a lo largo del campo gravitatorio**. La energía mecánica es la **suma de la energía potencial y la energía cinética**.

$$\mathbf{E_M} = \mathbf{E_c} + \mathbf{E_p} = \frac{1}{2}\cdot mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) \ [\,J\,]$$

- La **energía mecánica en una órbita es constante**. Y en el caso de **una órbita circular** se puede deducir y simplificar su expresión de la siguiente manera:

$$\mathbf{E_M} = \mathbf{E_c} + \mathbf{E_p} = \frac{1}{2}\cdot mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) \Rightarrow \left\{\frac{G\cdot M}{R} = v^2 \ (\,\textit{órbita circular})\right\} E_M = \frac{1}{2}\cdot m\frac{G\cdot M}{R} - \frac{GMm}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{E_M} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{GMm}}{\mathbf{R}} \ [\,J\,]$$

- *Esta última expresión es válida para una **órbita elíptica**, considerando el radio como el **radio medio** o semieje mayor "a", pero su demostración es diferente y más compleja. Por ello, suele aplicarse diréctamentea la hora de resolver problemas. Además, resulta interesante considerar que podemos igualarla a la suma de energía potencial y cinética de cualquier punto de la órbita. Esta consideración resulta útil en la resolución de problemas, especialmente atendiendo a calcular radios y velocidades en el afelio y el perihelio.*

$$\mathbf{E_M} = \mathbf{E_c} + \mathbf{E_p} \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{GM\cancel{m}}{R_M} = \frac{1}{2}\cdot \cancel{m}v^2 + \left(-\frac{GM\cancel{m}}{R}\right) \text{(para cualquier punto de la órbita)}$$

- Por otro lado, el **trabajo realizado por el campo gravitatorio** para desplazar una masa entre dos puntos del campo se puede calcular con las siguientes expresiones, todas ellas relacionadas entre sí:

$$\mathbf{W} = \Delta\mathbf{E_c} = -\Delta\mathbf{E_p} = -\mathbf{m}\Delta\mathbf{V} \qquad [\,\mathrm{J}\,]$$

- *A la hora de calcular* ***el trabajo realizado por el campo*** *al desplazar un cuerpo, si el signo resultante es negativo significa que el cuerpo se está moviendo en contra del campo, es decir, que hay que realizar ese trabajo en contra del campo para que el cuerpo se desplace. Si el signo es positivo significa que el trabajo lo realiza el campo, desplazando el cuerpo a favor del mismo.*

- El **potencial gravitatorio** es, junto con la intensidad de campo, una magnitud que se utiliza para cuantificar el campo gravitatorio. Sin embargo, el potencial es una magnitud escalar. Se define como la **energía potencial por unidad de masa** en un punto del campo.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E_p}}{\mathbf{m}} = \frac{-\frac{\mathrm{GM}\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{R}}}{\cancel{\mathrm{m}}} = -\frac{\mathbf{GM}}{\mathbf{R}} \qquad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$$

- **Principio de superposición:** para determinar el **campo gravitatorio** que crean **varias masas en un determinado punto del espacio se aplica el principio de superposición**, es decir, el **campo gravitatorio total** en un punto es la **suma vectorial de los campos** gravitatorios creados por cada masa en ese punto determinado. Para determinar la fuerza resultante sobre una masa se utiliza el mismo principio.

$$\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{g}}_1 + \vec{\mathbf{g}}_2 + \vec{\mathbf{g}}_3 + \ldots = \sum \vec{\mathbf{g}}_\mathbf{i} \qquad \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \ldots = \sum \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i}$$

De la misma forma, **el potencial gravitatorio total** en un punto del espacio determinado es la **suma de los potenciales** creados por cada una de las masas en ese punto. Se puede plantear de igual manera con la energía potencial gravitatoria si se considera la interacción entre varias masas.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \ldots = \sum \mathbf{V}_\mathbf{i} \qquad \mathbf{E}_\mathbf{p} = \mathbf{E}_{\mathbf{p1}} + \mathbf{E}_{\mathbf{p2}} + \mathbf{E}_{\mathbf{p3}} + \ldots = \sum \mathbf{E}_{\mathbf{pi}}$$

- Velocidad **de escape: es la velocidad mínima que ha de tener un cuerpo para desligarse de un campo gravitatorio.** La expresión correspondiente a la velocidad de escape en la superficie de un planeta (o a cierta altura) **se deduce considerando que el campo gravitatorio es un campo conservativo**, es decir, que la energía mecánica se conserva, **y, por tanto, la energía mecánica de un cuerpo en la superficie de un planeta** (o a cierta altura) **es la misma que la que tendrá ese cuerpo en el infinito, igual a cero.**

Para que el cuerpo escape del campo gravitatorio, habrá que comunicarle la velocidad necesaria para compensar su energía potencial, es decir para que su energía mecánica sea cero (llegue al infinito):

$$\mathbf{E_M(superficie) = E_M(infinito) = 0} \Rightarrow \mathrm{E_M(superficie) = E_c(superficie) + E_p(superficie) = 0} \Rightarrow$$

$$\mathbf{\frac{1}{2} \cdot m{v_e}^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \cancel{m}{v_e}^2 = \frac{GM\cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}} \quad [\mathrm{m/s}]$$

- **Una órbita tiene asociada una energía mecánica, que es constante en toda la órbita.** De esta manera la energía mecánica de un satélite en órbita es la **suma de su energía potencial y su energía cinética.**

  Así, un cambio de órbita supone una variación de energía mecánica. Esta **variación de energía mecánica** se puede entender también como **el trabajo que hay que realizar** para cambiar de órbita. Dicho trabajo será positivo si se pasa de una órbita de menor radio a una órbita de mayor radio (hay que transferir energía), y negativo si se pasa a una órbita de radio menor (se debe perder energía).

  De forma habitual se distinguen tres casos diferentes relacionados con este concepto:

  - **Cambio de órbita:** Paso de una órbita menor a otra mayor (lo más habitual), o viceversa:

$$\mathbf{W_{1\to2}} = \Delta\mathbf{E_M} = \mathbf{E_M}(\mathbf{R_2}) - \mathbf{E_M}(\mathbf{R_1}) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{R_2}} - \left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{R_1}}\right) \Rightarrow \Delta\mathrm{E_M} = \frac{\mathrm{GMm}}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{R_I}} - \frac{1}{\mathrm{R_2}}\right) \ [\mathrm{J}]$$

  - **Puesta en órbita:** Poner un satélite en órbita partiendo de la superficie de un planeta, donde no hay energía cinética:

$$\mathbf{W_{S\to O}} = \Delta\mathbf{E_M} = \mathbf{E_M}(\text{órbita}) - \mathbf{E_M}(\text{superficie}) = \mathbf{E_M}(\text{órbita}) - \mathbf{E_P}(\text{superficie}) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{R_O}} - \left(-\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{R_S}}\right) \Rightarrow \Delta\mathrm{E_M} = \mathrm{GMm}\left(\frac{1}{\mathrm{R_S}} - \frac{1}{2\mathrm{R_O}}\right) \ [\mathrm{J}]$$

- **Escapar de una órbita:** Cálculo de la **energía** necesaria para abandonar el campo gravitatorio en cuestión, considerando que llegaría a un punto infinitamente alejado, con velocidad nula y dónde la energía potencial es cero:

$$\mathbf{W}_{O\to\infty} = \Delta\mathbf{E_M} = \mathbf{E_M}(\text{infinito}) - \mathbf{E_M}(\text{órbita}) = \mathbf{0} - \mathbf{E_M}(\mathbf{R_O}) = -\left(-\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_O}\right) \Rightarrow \Delta E_M = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R_O} \ [\,J\,]$$

- *El trabajo que hay que realizar sobre el satélite para estos casos (energía que hay que aplicar o perder) no se debe confundir con el cálculo del trabajo que realiza un campo gravitatorio al desplazar un cuerpo entre dos puntos del campo (donde la E_m se mantiene constante).*