Ejemplos resueltos de Gravitación - 2º Bachillerato

Ejemplo resuelto 1: **2018-Junio 1B**

Considérese un satélite de masa 10^3 kg que orbita alrededor de la Tierra en una órbita circular geoestacionaria.

a) Determine el radio que tendría que tener la órbita para que su periodo fuese doble del anterior.

b) ¿Cuál es la diferencia de energía del satélite entre la primera y la segunda órbita?

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg.

Solución:

a) Por ser una órbita circular **tenemos un satélite realizando un movimiento circular uniforme y por ser una órbita geoestacionaria el período es de 24 horas.**

Por ser un movimiento circular uniforme la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el satélite debe ser igual a la fuerza centrípeta, que es la responsable del movimiento circular. **Considerando que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de atracción gravitatoria**, planteamos la 2ª ley de Newton, ley fundamental de la dinámica, igualando los módulos de ambas fuerzas, **quedando lo siguiente:**

$$\Sigma F = F_c \Rightarrow F_g = F_c \Rightarrow G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} = m\cdot\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\cdot\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\cdot\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow$$

$$\frac{G\cdot M}{r} = v^2 \text{ (esta velocidad es la velocidad orbital) } \Rightarrow r = \frac{G\cdot M}{v^2}$$

Como el enunciado nos pregunta por el radio de la órbita y **nos da el período orbital ponemos la velocidad orbital en función del período**, con las ecuaciones del movimiento circular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ ;\ \ v = r\cdot\omega \Rightarrow v = \frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Sustituyendo, queda la expresión asociada a la tercera ley de Kepler:

$$r = \frac{G \cdot M}{v^2} \Rightarrow r = \frac{G \cdot M}{\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2} \Rightarrow r = \frac{G \cdot M}{\frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2}} \Rightarrow r = \frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Como el período de la nueva órbita es el doble, serían 48 h, pero debemos ponerlo en unidades del SI, es decir, en segundos, y sustituyendo valores quedaría:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot (48 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 6{,}703 \cdot 10^7 \text{ m} = 67030 \text{ km}.$$

b) Se pide calcular la diferencia de energía mecánica entre las dos órbitas. **La energía mecánica del satélite es la suma de la energía cinética y la energía potencial asociada a cada órbita.**

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) \Rightarrow \left\{\frac{G \cdot M}{R} = v^2\right\} E_M = \frac{1}{2} \cdot m \frac{G \cdot M}{R} - \frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow E_M = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}$$

La diferencia de energía mecánica entre las dos órbitas la calcularemos teniendo en cuenta los diferentes radios de cada órbita.

$$\Delta E_M = E_M(R_{T=48h}) - E_M(R_{T=24h}) = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_{T=48h}} - \left(-\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_{T=24h}}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta E_M = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R_{T=24h}} - \frac{1}{R_{T=48h}}\right)$$

El radio de la órbita de 24 h (geoestacionaria) no lo tenemos calculado, pero lo hacemos utilizando el planteamiento del apartado anterior:

$$R_{T=24h} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 4{,}2 \cdot 10^7 \text{ m} = 42000 \text{ km}.$$

Sustituyendo valores en la expresión de la variación de E_M quedaría:

$$\Delta E_M = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R_{T=24h}} - \frac{1}{R_{T=48h}}\right) =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 10^{3}}{2}\left(\frac{1}{4{,}2 \cdot 10^{7}} - \frac{1}{6{,}703 \cdot 10^{7}}\right) = 1{,}74 \cdot 10^{9}\ \mathrm{J}.$$

El valor es positivo, ya que es energía aportada al tener más energía en la segunda órbita (el radio es mayor y tiene una energía mecánica mayor, es decir, número negativo de menor valor absoluto).

- Ejemplo resuelto 2**: 2016-Modelo 1B**

Un cierto planeta esférico tiene de masa el doble de la masa de la Tierra, y la longitud de su circunferencia ecuatorial mide la mitad de la de la Tierra. Calcule:

a) La relación que existe entre la velocidad de escape en la superficie de dicho planeta con respecto a la velocidad de escape en la superficie de la Tierra.

b) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.

Dato: Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, $g_T = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$.

Solución:

a) Antes de empezar a resolver este apartado **deducimos la expresión correspondiente a la velocidad de escape en la superficie de un planeta, considerando que el campo gravitatorio es un campo conservativo**, es decir, que la energía mecánica se conserva, **y, por tanto, la energía mecánica de un cuerpo en la superficie de un planeta es la misma que la que tendrá ese cuerpo en el infinito.**

De esta manera se considera que el cuerpo llega al infinito con velocidad cero, lo que se traduce en que llega con energía cinética nula, y también se considera que en el infinito tiene energía potencial cero.

Esto se traduce en que **el cuerpo tiene energía mecánica igual a cero en el infinito, y también en la superficie del planeta.**

Para que el cuerpo escape del campo gravitatorio en la superficie del planeta, habrá que comunicarle la velocidad necesaria para anular su energía mecánica:

$$E_M(\text{superficie}) = E_M(\text{infinito}) = 0$$

$$E_M(\text{superficie}) = E_c(\text{superficie}) + E_p(\text{superficie}) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot m{v_e}^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Ahora **compararemos las dos velocidades de escape que nos pide el enunciado*:***

$$\frac{v_e(\text{Tierra})}{v_e(\text{Planeta})} = \frac{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}{\sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}}} = \sqrt{\frac{R_P M_T}{R_T M_P}}$$

El enunciado nos dice que la longitud de la circunferencia del planeta es la mitad que la longitud de la circunferencia de la Tierra, por lo que podemos deducir la relación entre los radios haciendo uso de la expresión:

$$L = 2\pi R \Rightarrow L_P = \frac{1}{2} L_T \Rightarrow 2\pi R_P = \frac{1}{2}(2\pi R_T) \Rightarrow R_T = 2R_P$$

Además, el enunciado nos dice la relación entre las masas:

$$2M_T = M_P \Rightarrow M_T = \frac{M_P}{2}$$

Comparando:

$$\frac{v_e(\text{Tierra})}{v_e(\text{Planeta})} = \sqrt{\frac{R_P M_T}{R_T M_P}} = \sqrt{\frac{R_P \frac{M_P}{2}}{2R_P M_P}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2v_e(\text{Tierra}) = v_e(\text{Planeta})$$

b) Para calcular la aceleración de la gravedad en el planeta, relacionaremos esta con la aceleración de la gravedad de la Tierra. **La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta cualquiera se puede obtener en función del radio del planeta y de la masa del planeta, igualando el peso de un cuerpo cualquiera** (en superficie) **a la fuerza de atracción gravitatoria que el planeta ejerce sobre dicho cuerpo** (en la superficie)**.**

$$P = F_G \Rightarrow mg = \frac{GM_P m}{{R_P}^2} \Rightarrow g = \frac{GM_P}{{R_P}^2}$$

Comparando ahora las dos expresiones y atendiendo a la relación entre las masas y los radios de los dos planetas que se han indicado en el apartado anterior, tenemos:

$$\frac{g\,(\text{Tierra})}{g\,(\text{Planeta})} = \frac{\frac{GM_T}{{R_T}^2}}{\frac{GM_P}{{R_P}^2}} = \frac{\frac{M_T}{{R_T}^2}}{\frac{M_P}{{R_P}^2}} = \left\{\begin{matrix} M_T = \frac{M_P}{2} \\ R_T = 2R_P \end{matrix}\right\} \frac{\frac{\frac{M_P}{2}}{(2R_P)^2}}{\frac{M_P}{{R_P}^2}} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$8g(\text{Tierra}) = g(\text{Planeta}) \Rightarrow g(\text{Planeta}) = 8 \cdot 9{,}81 = 78{,}48\ \text{m/s}^2$$

La aceleración de la gravedad es un vector, en este caso se corresponde con el vector campo gravitatorio en la superficie del planeta, y por tanto su dirección es una línea radial a partir del centro del planeta, y su sentido dirigido hacia el centro del planeta.

$$\vec{g} = -78{,}48\,\vec{u_r}\ \frac{N}{kg}$$

Ejemplo resuelto 3**: 2018-Modelo 1A**

Dos partículas puntuales de masas m_1 = 2 kg y m_2 = 10 kg se encuentran situadas a lo largo del eje X. La masa m_1 está en el origen, x_1 = 0, y la masa m_2 en el punto x_2 = 5 m.

a) Determine el punto en el eje X en el que el campo gravitatorio debido a ambas masas es nulo.

b) ¿Cuál es el potencial gravitatorio debido a ambas masas en el punto para el que el campo gravitatorio es cero?

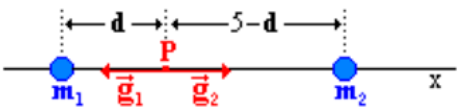
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N·m^2·kg^{-2}

Solución:

a) El campo gravitatorio creado por una masa viene expresado por:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R^2}\overrightarrow{u_r}\ \frac{N}{kg}$$

Donde $\overrightarrow{u_r}$ representa un vector unitario en la dirección radial y el signo negativo indica que está dirigido hacia la masa. **Por lo tanto, al tener dos masas, el punto donde el campo creado por ambas se anula estará en un punto intermedio de la línea que une ambas masas** (ver diagrama).



Utilizamos entonces el principio de superposición. *(Nótese que los campos tienen sentidos opuestos y hay un punto intermedio en el que se cancelaran, más cercano a x_1 que a x_2 al ser m_2 mayor que m_1).*

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0 \Rightarrow -\frac{Gm_1}{d^2}\vec{\imath} + \frac{Gm_2}{(5-d)^2}\vec{\imath} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Gm_2}{(5-d)^2} = \frac{Gm_1}{d^2} \Rightarrow \frac{m_2}{(5-d)^2} = \frac{m_1}{d^2} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{(5-d)^2}{d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{(5-d)^2}{d^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{5-d}{d} \Rightarrow \sqrt{\frac{10}{2}} = \frac{5-d}{d}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{5-d}{d} \Rightarrow d \cdot \sqrt{5} = 5 - d \Rightarrow d + d \cdot \sqrt{5} = 5$$

$$\Rightarrow d\left(1+\sqrt{5}\right) = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{\left(1+\sqrt{5}\right)} = 1{,}54\, m$$

b) **El potencial en un punto de un campo gravitatorio es la energía potencial por unidad de masa** (suele expresarse con la letra V, o con la letra U), **y viene dado por la expresión:**

$$V = -\frac{GM}{R}\ J/kg$$

Para un grupo de masas puntuales el potencial creado en un punto viene sigue el principio de superposición, entonces queda:

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{Gm_1}{d} + \left(-\frac{Gm_2}{5-d}\right) = -G\left(\frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{5-d}\right) \Rightarrow$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\left(\frac{2}{1{,}54} + \frac{10}{5-1{,}54}\right) = -2{,}79 \cdot 10^{-10}\, J/kg$$