Resumen: Propiedades y operaciones propias de números radicales.

- **Raíz:** En una raíz se distinguen dos partes principales: el **índice** (letra n) y el **radicando** (letra a).

$$\sqrt[\text{índice}]{\text{radicando}} = \sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}} \qquad Ej\colon \sqrt[3]{2}$$

  - El índice de una raíz debe ser mayor que 1, siendo los índices más habituales n=2 y n=3.
  - Índice **n=2**: en este caso **no se indica** y se denomina **raíz cuadrada**. Ej: $\sqrt{\mathbf{8}}$
  - Índice **n=3**: se denomina raíz cúbica; a partir del cual se debe indicar el índice escrito. Ej: $\sqrt[3]{\mathbf{7}}$
  - Normalmente, para los índices siguientes se utilizan los números ordinales: raíz cuarta, raíz quinta…
  - El radicando puede llevar un exponente, y es algo habitual. Ejemplo: $\sqrt[4]{\mathbf{3}^{\mathbf{2}}}$

- Una raíz es una **potencia con exponente fraccionario**:

$$\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}^{\mathbf{b}}} = \mathbf{a}^{\mathbf{b/n}}$$

  - A modo de ejemplo se muestran las siguientes transformaciones:

$$\sqrt[4]{\mathbf{2}^{\mathbf{3}}} = \mathbf{2}^{\mathbf{3/4}} \qquad \sqrt[3]{\mathbf{5}} = \mathbf{5}^{\mathbf{1/3}} \qquad \sqrt{\mathbf{6}} = \mathbf{6}^{\mathbf{1/2}} \qquad \sqrt{\mathbf{x}^{\mathbf{3}}} = \mathbf{x}^{\mathbf{3/2}}$$

- **Nota:** Esta relación resulta muy útil para entender o demostrar varias de las propiedades y operaciones que se realizan con números radicales.

- **Propiedades de los números radicales:** Las principales propiedades son las siguientes (deben considerarse en ambos sentidos):

Propiedad	Expresión	Ejemplos
Producto de raíces del **mismo índice.**	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5\cdot 5^2}$ $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$
Cociente de raíces del **mismo índice.**	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{5\cdot 7}{5}} = \sqrt[3]{7}$
Potencia de una raíz	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^b = \sqrt[n]{a^b}$	$\left(5\sqrt{2}\right)^3 = 5^3\sqrt{2^3} = 5^3\cdot 2\sqrt{2}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$	$3\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}} = 3\sqrt[2\cdot 5\cdot 3]{2} = 3\sqrt[30]{2}$

- Las raíces de **índice par** solo dan como resultado **un número real si el radicando es positivo**, si no es positivo solo se pueden resolver con números imaginarios. Además, deben resolverse considerando ambos signos en el resultado. Las de **índice impar mantienen en el resultado el signo** del radicando. Ejemplos:

$$\boldsymbol{\sqrt{-4} = \nexists \text{ en } \mathbb{R}.} \qquad \boldsymbol{\sqrt{16} = \pm 4} \qquad \boldsymbol{\sqrt[4]{81} = \pm 3} \qquad \boldsymbol{\sqrt[3]{-27} = -3} \qquad \boldsymbol{\sqrt[5]{32} = 2}$$

- **Simplificación de radicales:** El índice de una raíz se puede simplificar con el exponente del radicando. Ejemplos:

$$\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[3\cdot\cancel{3}]{5^{2\cdot\cancel{3}}} = \sqrt[3]{5^2} \qquad Otra\ forma\ de\ verlo: \sqrt[4]{7^6} = 7^{6/4} = 7^{3/2} = \sqrt{7^3}$$

- **Modificar el índice de una raíz:** Es el proceso contrario al anterior. Multiplicando el índice y el exponente del radicando por el mismo índice, queda modificado el índice deseado. Este proceso es muy utilizado para poder multiplicar o dividir radicales con diferente índice. Normalmente se requiere hacer el **mínimo común múltiplo** de todos los índices, para conseguir después que todos los índices sean dicho número. Ejemplos:

  - Modificar un índice de una raíz:

$$\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[2\cdot 9]{5^{2\cdot 6}} = \sqrt[18]{5^{12}}$$

  - Llevar todos los índices a un mismo índice para poder multiplicar. Se calcula el mínimo común múltiplo de todos los índices de las raíces implicadas.

$$\frac{\sqrt[6]{3^4}\cdot\sqrt[9]{3^2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow (m.c.m = 18) \Rightarrow \frac{\sqrt[3\cdot 6]{3^{3\cdot 4}}\cdot\sqrt[2\cdot 9]{3^{2\cdot 2}}}{\sqrt[9\cdot 2]{3^{9\cdot 1}}} = \frac{\sqrt[18]{3^{12}}\cdot\sqrt[18]{3^4}}{\sqrt[18]{3^9}} = \sqrt[18]{\frac{3^{12}\cdot 3^4}{3^9}} = \sqrt[18]{3^{12+4-9}} = \sqrt[18]{3^7}$$

- **Extracción o introducción de factores en un radical:** teniendo en cuenta el concepto de radical:

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a \qquad A\ modo\ de\ ejemplo: \sqrt[4]{3^4} = 3^{4/4} = 3$$

  - Para **extraer un factor de una raíz**, el factor debe estar elevado a un número que sea igual que el índice de la raíz. Si se cumple esta condición el factor sale de la raíz multiplicando. Ejemplos:

$\sqrt[4]{3^7} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^3} = 3 \cdot \sqrt[4]{3^3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$

- Para **introducir un factor en una raíz**, se multiplica el exponente del factor por el índice de la raíz. Es el proceso contrario al anterior. Ejemplos:

$15\sqrt{2} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2} = \sqrt{450}$ $\qquad$ $36\sqrt[3]{5} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^{3\cdot 2} \cdot 3^{3\cdot 2} \cdot 5} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^6 \cdot 5}$

- **Suma y resta de números radicales:** solamente se pueden sumar o restar raíces que tengan el **mismo índice y radicando**. Se puede entender como si la raíz en cuestión fuera una "x". Ejemplos:

$4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} \Rightarrow$ *No se pueden restar (distinto radicando).*

$2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt{5} \Rightarrow$ *No se pueden sumar (distinto índice).*

$4\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{5} = (4 + 3 - 5) \cdot \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$ Se puede entender como suma y resta de x=$\sqrt[3]{5}$

Ejercicio típico: $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 4\sqrt{27} = 3\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{5^2 \cdot 3} + 4\sqrt{3^2 \cdot 3} = 3 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 4 \cdot 3\sqrt{3} =$

$= 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = (6 - 10 + 12) \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

- **RACIONALIZAR:** racional consiste en eliminar las raíces del denominador. Para ello se multiplica por una fracción que sea igual en el numerador ye en denominador, de tal manera que es como si se multiplica por "1", pero trae como consecuencia una transformación que elimina las raíces del denominador. Se pueden distinguir dos **casos principales**:

- Que el **denominador sea un monomio** con una raíz: Se multiplicará por la misma raíz, modificando el exponente del radicando como sea necesario para provocar que desaparezca la raíz al multiplicar.

$$\mathbf{Ej.\,1}: \frac{2x+4}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{2x+4}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(2x+4)\cdot\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{2x\sqrt{6}+4\sqrt{6}}{6} = \frac{\cancel{2}\left(x\sqrt{6}+2\sqrt{6}\right)}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{\left(x\sqrt{6}+2\sqrt{6}\right)}{3}$$

$$\mathbf{Ej.\,2}: \frac{2+\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{3^2}} \Rightarrow \frac{2+\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{3^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{\left(2+\sqrt[5]{5}\right)\cdot\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2\cdot 3^3}} =\cdot \frac{2\sqrt[5]{3^3}+\sqrt[5]{5\cdot 3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}+\sqrt[5]{5\cdot 3^3}}{3}$$

- *Nota: **después de racionalizar**, a veces se pueden **simplificar** numerador y denominador, para lo cual conviene considerar si es posible sacar factor común…*

- Que el denominador sea un binomio con una o dos raíces cuadradas. Se multiplica por la conjugada del binomio, de tal forma que al multiplicar se elevan las dos partes del binomio al cuadrado y desaparecen (considerar la expresión notable:

$$\mathbf{Ej.\,1}: \frac{3}{3-\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{3}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)}{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{9+3\sqrt{3}}{9-3} = \frac{3\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{Ej.\,2}: \frac{2x-4}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2x-4}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \frac{(2x-4)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2(x-2)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x-2} = 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)$$

- *Nota: En expresiones complejas, antes de multiplicar conviene mirar si se puede simplificar.*